

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ ЗАДАЧИ НАСЫЩЕНИЯ ДВУСЛОЙНОГО ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

М.М. Алимов

Аннотация

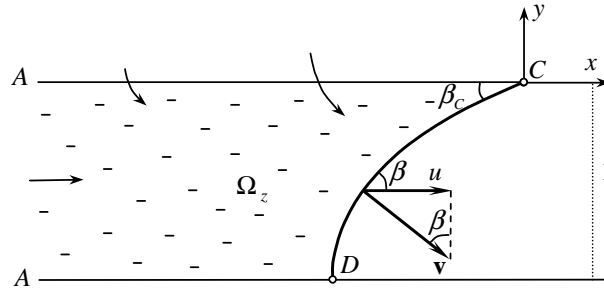
Рассматривается плоская задача определения стационарной конфигурации межфазной границы насыщения двуслойного пористого материала жидкостью. Для случая большого контраста толщин слоев и их проницаемостей она формулируется как задача со свободной границей в толстом малопроницаемом слое со специфическим условием на границе слоев. Для ее численного анализа предлагается итерационный метод, аналогичный методу Леви – Чивиты в теории струй идеальной жидкости. С его помощью в некотором диапазоне изменения параметров процесса с удовлетворительной точностью удалось получить численно-аналитическое решение задачи. Проведено сравнение результатов с известными асимптотическими оценками.

Ключевые слова: задачи со свободными границами, многофазные среды, насыщение жидкостью пористых материалов, технология VARTM.

Введение

Пусть имеется горизонтальный слоистый пласт, кровля и подошва которого непроницаемы. Пласт состоит из двух слоев: нижнего толстого и верхнего тонкого. Слои имеют толщину h^\pm , пористость m^\pm и проницаемость k^\pm , где все величины постоянны, верхний индекс плюс относится к тонкому, а минус – к толстому слою. Между слоями возможны перетоки. Имеется межфазная граница – некоторая поверхность, соединяющая кровлю и подошву пласта и разбивающая весь пласт на две зоны: справа от границы пласт заполнен воздухом, слева – полностью насыщен водой (вязкой жидкостью). Воздух справа на бесконечности соединяется с атмосферой, и весь пласт первоначально поддерживается при постоянном атмосферном давлении. Затем слева из бесконечности по всей мощности пласта с постоянным расходом начинает подаваться вода, которая вытесняет воздух в атмосферу. По истечению некоторого промежутка времени устанавливается стационарная конфигурация границы между фазами и скорость ее продвижения. Основная задача – найти эту стационарную конфигурацию межфазной границы и величину скорости ее продвижения в зависимости от параметров пласта.

Задача интересна с точки зрения как возможных геофизических приложений (для анализа процессов совместного движения воды и воздуха в слоистых природных пластах), так и возможных технологических приложений. В частности, она возникает в производстве композитных материалов по технологии вакуумного вливания смолы в закрытые формы (VARTM), когда к основному образцу – слою пористого и малопроницаемого материала – с целью существенного ускорения процесса его насыщения полимером добавляется тонкий «распределительный» слой высокопроницаемого материала [1, 2].

Рис. 1. Вид физической плоскости z

1. Постановка задачи

Основные предположения, касающиеся характера процесса насыщения пористого материала, состоят в том, что вязкая жидкость несжимаема, полностью насыщает пористую матрицу (нет двухфазных зон), движение ее подчиняется закону Дарси, силы тяжести отсутствуют. Соответственно, при условии установившейся формы межфазной границы в системе отчета, связанной с этой границей, движение жидкости будет установившимся и потенциальным.

В описываемом процессе существенны два безразмерных комплекса

$$\varepsilon = \frac{k^- h^-}{k^+ h^+}, \quad \delta = \frac{m^+ h^+}{m^- h^-}.$$

Первый характеризует соотношение между пропускными свойствами слоев, второй – между емкостными свойствами слоев. В технологических приложениях наиболее интересен случай сильного контраста толщин слоев ($\delta \ll 1$) и их проницаемостей ($\varepsilon \ll 1$). Как показано в работе [3], в этом случае задача определения стационарной формы межфазной границы насыщения двуслойного пористого материала сводится к краевой задаче для одного, а именно для толстого малопроницаемого слоя. В безразмерной постановке в терминах потенциала φ скорости течения она формулируется следующим образом

$$\Omega_z : \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad (1)$$

$$AD : \quad \partial \varphi / \partial y = 0; \quad (2)$$

$$AC : \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_A = (1, 0); \quad (3)$$

$$DC : \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u \sin \beta, \quad (4)$$

где Ω_z – область физической плоскости, отвечающая смоченной части толстого малопроницаемого слоя. Ее граница состоит из трех участков: AD – непроницаемой подошвы пласта, AC – границы между слоями и DC – межфазной границы неизвестной конфигурации (см. рис. 1). В бесконечно удаленной точке A задается скорость течения (см. вторую часть условия (3)). Через β обозначен угол наклона к горизонту касательной к контуру DC , через u – безразмерная скорость продвижения контура DC , которая полностью выражается через параметры ε и δ

$$u = \varepsilon^{-1} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \delta} \approx \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon - \delta).$$

Граничное условие (3) характеризует приток жидкости из верхнего тонкого высокопроницаемого слоя и после интегрирования вдоль границы может быть приведено к виду [3]

$$AC : \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + \varepsilon [1 - \psi], \quad \psi_A = 1, \quad \psi_C = u, \quad (5)$$

где ψ – функция тока, гармонически сопряженная φ .

Граничное условие на свободной границе (4), как обычно, для задач типа Хеле-Шоу состоит из двух частей. Первая часть – динамическое условие, которое означает, что действием капиллярных сил на межфазной поверхности пренебрегается. Вторая часть – кинематическое условие материальности свободной границы. Условие (4) также можно переписать в двух эквивалентных формулировках [4–6]

$$DC : \quad \varphi = 0, \quad \psi = u(y + 1); \quad (6)$$

$$DC : \quad \varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{u}{2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \frac{u^2}{4}. \quad (7)$$

В результате сравнения (5) и (7) можно найти точное значение вектора скорости жидкости $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ в точке C

$$v_{x,C} = 1 + \varepsilon(1 - u) \approx \delta, \quad -v_{y,C} = v_{x,C}(u - v_{x,C}) \approx \sqrt{\delta/\varepsilon}$$

и, соответственно, угол наклона этого вектора к оси y

$$\beta_C = \arctg |v_{x,C}/v_{y,C}| \approx \sqrt{\varepsilon \delta}.$$

Отметим, что краевая задача (1)–(4) существенно нелинейна. Нелинейность постановки в физической плоскости обусловлена наличием свободной границы DC . Результативный в некоторых случаях прием ухода от такой нелинейности с помощью переформулировки задачи во вспомогательной плоскости здесь не так эффективен, поскольку при этом становится нелинейным граничное условие на участке AC .

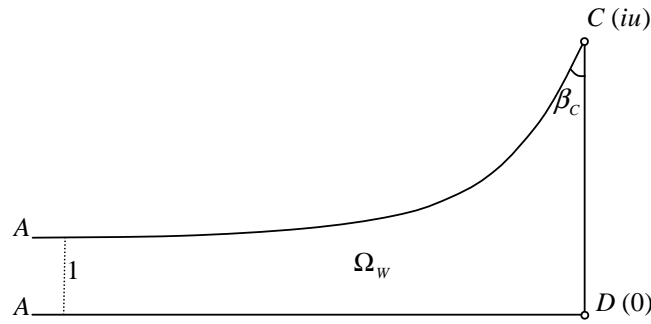
2. Схема построения численно-аналитического решения задачи

Поскольку течение потенциально и имеется свободная граница, естественно воспользоваться общей идеологией метода годографа скорости из теории струй идеальной жидкости. В первую очередь надо провести параметризацию решения – ввести вспомогательную плоскость комплексного переменного, скажем, ζ , в результате чего краевая задача сведется к отысканию вида двух аналитических функций комплексного переменного, например:

$$z = z(\zeta), \quad W = W(\zeta), \quad (8)$$

где $z(\zeta)$ – функция, конформно отображающая вспомогательную комплексную плоскость ζ на физическую комплексную плоскость z , а $W(\zeta)$ – функция, конформно отображающая вспомогательную комплексную плоскость ζ на плоскость комплексного потенциала течения $W = \varphi + i\psi$.

Как правило, в теории струй в качестве вспомогательной плоскости выбирается область канонического вида так, чтобы по крайней мере одна из функций параметризованного решения определялась сразу в замкнутом виде, а вторая представлялась в виде, удобном для численного анализа (если она не определяется сразу).

Рис. 2. Вид плоскости комплексного потенциала течения W

В данном случае, к сожалению, ни одна из функций (8) сразу не определяется и надо ориентироваться на численную процедуру поиска решения. При этом, выбирая в качестве вспомогательной плоскости ζ область канонического вида, только для одной из функций параметризованного решения, скажем $W(\zeta)$, удастся добиться представления, удобного для численного анализа. Для другой функции естественно ввести другую вспомогательную плоскость комплексного переменного, скажем η , чтобы функция $z(\eta)$ представлялась в виде, удобном для численного анализа. Между двумя вспомогательными плоскостями ζ и η канонического вида можно установить взаимнооднозначное соответствие $\eta = \eta(\zeta)$, которое будет выражаться замкнутой аналитической формулой. В результате, помимо параметрического вида решения (8), можно использовать и следующий вид

$$z = z(\eta), \quad W = W(\eta). \quad (9)$$

Соответственно, из четырех функций (8), (9) достаточно определить численно две функции $W(\zeta)$ и $z(\eta)$, предварительно представив их, например, в виде функциональных рядов. В частности, при подходящем выборе вспомогательных плоскостей ζ и η функции $W(\zeta)$ и $z(\eta)$ в определяющих уравнениях можно представить в виде рядов Фурье. Тогда появляется возможность использования быстрого преобразования Фурье (далее БПФ).

В то же время качественный анализ задачи (1)–(4) показывает, что функции $W(\zeta)$ и $z(\eta)$ обязательно будут иметь дробно-степенные особенности в точке C (есть также логарифмические особенности в точке A , но они не создают больших трудностей). Действительно, области Ω_z и Ω_W представляют собой треугольники ACD с одной криволинейной и неизвестной по форме стороной: у области Ω_z это контур CD (см. рис. 1), у области Ω_W это граница AC (см. рис. 2). В области Ω_W известно положение всех угловых точек A , C , D , в то время, как в области Ω_z координата x_D неизвестна и подлежит определению в ходе решения задачи. Все углы в областях Ω_z и Ω_W известны, в частности, угол при точке C в обеих областях составляет $\beta_C \neq \pi/2$.

Как известно, наличие дробно-степенных особенностей приводит к плохой сходимости рядов Фурье и делает практически невозможным определение функций $z(\eta)$ и $W(\zeta)$ непосредственно в виде таких рядов. Поэтому предлагается, аналогично методу Леви–Чивиты в теории струй идеальной жидкости [7], аналитически в замкнутом виде выделять главную часть решения, содержащую нужные особенности в точке C , и искать решение задачи (1)–(4) в виде аддитивного представления

$$z(\eta) = z_0(\eta) + z_1(\eta), \quad W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_1(\zeta),$$

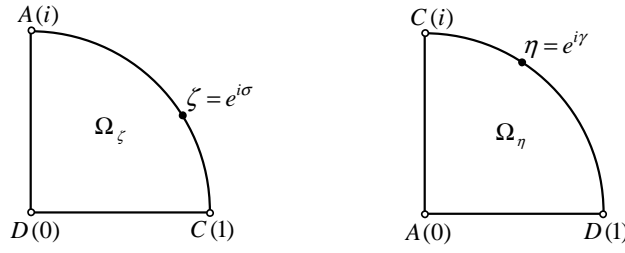


Рис. 3. Вид вспомогательных плоскостей: а) переменного ζ , б) переменного η

где $z_0(\eta)$ и $W_0(\zeta)$ – функции известного вида, являющиеся главными частями решения; а $z_1(\eta)$ и $W_1(\zeta)$ – гладкие (в смысле отсутствия особенности в точке C) добавки неизвестного вида. Для их численного определения из краевой задачи (1)–(4) будут выведены два нелинейных граничных интегро-дифференциальных уравнения.

В то же время есть одно существенное отличие от упомянутого метода Леви–Чивиты. В данном случае невозможно путем локального анализа полностью выявить характер дробно-степенных особенностей функции $z(\eta)$ и $W(\zeta)$ в точке C : у особенности определяется только сам дробный показатель степени, а множитель при особенности, иначе ее момент, остается неопределенным (логарифмические особенности в точке A таких проблем не создают, поэтому на них внимание не акцентируется). Следовательно, можно ожидать, что получить решение методом итераций только функций $z_1(\eta)$, $W_1(\zeta)$ при предварительно построенных функциях $z_0(\eta)$, $W_0(\zeta)$ не удастся. Последние также необходимо перестраивать по ходу итераций.

Действительно, пробные расчеты показали, что при фиксированном виде функций $z_0(\eta)$, $W_0(\zeta)$ и наложении всех необходимых условий на искомые функции $z_1(\eta)$, $W_1(\zeta)$ в их разложениях Фурье уже с первых итераций проявляется старшая гармоника возмущений, что неизбежно приводит к расходимости итерационного процесса.

В то же время успешной оказалась другая стратегия – отказаться от некоторых необходимых условий на функции $z_1(\eta)$ и $W_1(\zeta)$, а появившуюся свободу использовать для сглаживания искомых функций на каждой итерации, фактически для принудительного погашения старшей гармоники. Недостающие необходимые условия накладываются уже на полные функции $z(\eta)$ и $W(\zeta)$ и удовлетворяются за счет перестраивания главных частей решения $z_0(\eta)$ и $W_0(\zeta)$. Таким образом, предлагается организовать итерационный процесс, каждая итерация которого состоит из двух шагов: на первом шаге определять гладкие добавки $z_1^{(j)}(\eta)$, $W_1^{(j)}(\zeta)$, а на втором – перестраивать главные части решения $z_0^{(j)}(\eta)$, $W_0^{(j)}(\zeta)$, где верхний индекс (j) здесь и далее обозначает номер итерации.

3. Параметризация решения

В качестве вспомогательных плоскостей комплексного параметрического переменного ζ и η выберем области канонического вида – четверти единичного круга с соответствием точек, представленным на рис. 3, а, б.

Взаимнооднозначное соответствие между этими плоскостями устанавливает дробно-линейное конформное отображение [8]

$$\eta(\zeta) = -\frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = -\frac{2i}{(\zeta + i)^2}, \quad (10)$$

которое позволяет найти в замкнутом виде и производную отображения. Поясним, чем объясняется такой выбор вспомогательных плоскостей. В плоскости W известен участок границы CA , и для определения функции $W(\zeta)$ этому участку границы в плоскости ζ удобно сопоставить дугу единичной окружности. На двух остальных участках границы выполняются «хорошие» граничные условия

$$AD : \psi = 0; \quad DC : \varphi = 0. \quad (11)$$

Выполнение таких же граничных условий естественно потребовать для обеих аддитивных частей функции $W(\zeta)$: функций $W_0(\zeta)$ и $W_1(\zeta)$. Поэтому гладкую в Ω_ζ функцию $W_1(\zeta)$ можно представить в виде степенного ряда по нечетным степеням ζ

$$W_1(\zeta) = i \sum_{k=0}^K C_{2k+1} \zeta^{2k+1}, \quad (12)$$

коэффициенты которого C_{2k+1} вещественны в силу граничных условий (11). Соответственно, на неизвестной границе CA степенной ряд (12) превращается в ряд Фурье

$$\tilde{\varphi}_1(\sigma) = - \sum_{k=0}^K C_{2k+1} \sin(2k+1)\sigma, \quad \tilde{\psi}_1(\sigma) = \sum_{k=0}^K C_{2k+1} \cos(2k+1)\sigma. \quad (13)$$

Здесь символом “ \sim ” обозначаются граничные значения соответствующих функций переменной ζ на участке CA , где $\zeta = e^{i\sigma}$.

Аналогичным образом, в плоскости z неизвестен участок границы DC , и для определения функции $z(\eta)$ ему в плоскости η удобно сопоставить дугу единичной окружности. На двух остальных участках границы выполняются «хорошие» граничные условия

$$CA : y = 0; \quad AD : y = -1. \quad (14)$$

Выполнение таких же граничных условий (с точностью до значения константы в правой части условия на AD) естественно потребовать у обеих аддитивных частей функции $z(\eta)$: функций $z_0(\eta)$ и $z_1(\eta)$. Поэтому функцию $z_1(\eta)$ можно представить в виде

$$z_1(\eta) = C_{-1} \left(\ln \eta - i \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{k=0}^K C_{2k} \eta^{2k}. \quad (15)$$

Здесь коэффициенты ряда C_{2k} , наряду с множителем C_{-1} , вещественны в силу граничных условий (14). Под логарифмом понимается главная ветвь. Первое слагаемое в правой части выражения необходимо для обеспечения скачка значения y_1 в точке A при переходе с границы AD на границу AC .

Соответственно, на неизвестной границе DC степенной ряд в (15) превращается в ряд Фурье

$$\hat{x}_1(\gamma) = \sum_{k=0}^K C_{2k} \cos(2k\gamma), \quad \hat{y}_1(\gamma) = C_{-1} \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{k=1}^K C_{2k} \sin(2k\gamma). \quad (16)$$

Здесь символом “ \wedge ” обозначаются граничные значения соответствующих функций переменной η на участке DC , где $\eta = e^{i\gamma}$.

В результате такой параметризации определение функций $W(\zeta)$ и $z(\eta)$ сводится к определению дискретного набора коэффициентов C_k , $k = -1, 0, 1, \dots, K$, при условии, что функции $W_0(\zeta)$ и $z_0(\eta)$ будут известны.

4. Вывод граничных уравнений и организация первого шага итераций

Условимся и далее для любых функций использовать символы “ \sim ”, “ \wedge ” над знаком функции для обозначения граничных значений этих функций на участках границы CA и DC соответственно.

Граничное уравнение для функции $W(\zeta)$ на участке границы CA можно получить из граничного условия (5). Действительно, подставляя следующее граничное соотношение

$$CA: \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_y = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tilde{x}} = \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\sigma} \right) / \left(\frac{d\tilde{x}}{d\sigma} \right)$$

в условие (5), получим граничное уравнение на участке границы CA для функции $W(\zeta)$:

$$CA: \frac{d\tilde{\varphi}}{d\sigma} = [1 + \varepsilon - \varepsilon\tilde{\psi}] \frac{d\tilde{x}}{d\sigma} \quad (17)$$

с условиями на концах интервала $\sigma \in [0, \pi/2]$

$$C: \tilde{W}(\sigma)|_{\sigma=0} = iu; \quad A: \tilde{W}(\sigma)|_{\sigma=\pi/2} = -\infty + i. \quad (18)$$

При этом надо учитывать, что $\tilde{W}(\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma) + i\tilde{\psi}(\sigma)$ не просто функция вещественного переменного σ , а обозначение относящихся к участку CA граничных значений функции $W(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta \in \Omega_\zeta$. Поэтому к задаче (17), (18) надо также добавить граничные условия для функции $W(\zeta)$ на остальных участках границы области Ω_ζ :

$$\psi(\zeta)|_{AD} = 0, \quad \varphi(\zeta)|_{DC} = 0 \quad (19)$$

и оценку локального поведения функции $W(\zeta)$ в окрестности точки A :

$$\zeta \sim i: W(\zeta) \sim \frac{2}{\pi} \ln(\zeta - i). \quad (20)$$

Отметим, что локальное поведение (20) функции $W(\zeta)$ согласуется с граничными условиями (18), (19).

В свою очередь, граничное уравнение для функции $z(\eta)$ на участке границы DC очевидным образом можно получить из второго граничного условия в (6):

$$DC: \hat{y} = u^{-1}\hat{\psi} - 1. \quad (21)$$

Граничное уравнение (17) на участке границы CA включает в себя производные z . Чтобы избежать при расчетах процедуры численного дифференцирования z как источника высокочастотной погрешности, граничное уравнение (21) на участке границы DC целесообразно также переписать в дифференциальной форме. Продифференцируем его вдоль границы DC в плоскости η . В результате получим более подходящий вид граничного уравнения для функции $z(\eta)$ на участке границы DC :

$$DC: \frac{d\hat{y}}{d\gamma} = u^{-1} \frac{d\hat{\psi}}{d\gamma} \quad (22)$$

и условия на концах интервала $\gamma \in [0, \pi/2]$

$$D: \hat{y}(\gamma)|_{\gamma=0} = -1; \quad C: \hat{z}(\gamma)|_{\gamma=\pi/2} = 0. \quad (23)$$

Здесь также необходимо учитывать, что $\hat{z}(\gamma) = \hat{x}(\gamma) + i\hat{y}(\gamma)$ не просто функция вещественного переменного γ , а обозначение относящихся к участку DC граничных

значений функции $z(\eta)$ комплексного переменного $\eta \in \Omega_\eta$. Поэтому к задаче (22), (23) надо добавить граничные условия для функции $z(\eta)$ на остальных участках границы области Ω_η :

$$y(\eta)|_{CA} = 0; \quad y(\eta)|_{AD} = -1 \quad (24)$$

и оценку локального поведения функции в точке A :

$$\eta \sim 0: \quad z(\eta) \sim \frac{1}{\pi} \ln \eta. \quad (25)$$

Отметим, что локальное поведение (25) функции $z(\eta)$ согласуется с граничными условиями (23), (24).

Таким образом, краевая задача (1)–(4) сведена к совокупности двух граничных уравнений (17), (22) относительно функций $W(\zeta)$ и $z(\eta)$, которые надо решить совместно с граничными условиями (18)–(20), (23)–(25).

В соответствии с принятой в п. 2 схемой решения перепишем граничные уравнения (17), (22) в виде итерационных уравнений для определения гладких добавок $W_1^{(j)}(\zeta)$, $z_1^{(j)}(\eta)$ по известному с предыдущей итерации виду функций $W_0^{(j-1)}(\zeta)$, $z_0^{(j-1)}(\eta)$, $W_1^{(j-1)}(\zeta)$, $z_1^{(j-1)}(\eta)$:

$$CA: \quad \frac{d\tilde{\varphi}_1^{(j)}}{d\sigma} = -\frac{d\tilde{\varphi}_0^{(j-1)}}{d\sigma} + \varepsilon \left[\varepsilon^{-1} + 1 - \tilde{\psi}_0^{(j-1)} - \tilde{\psi}_1^{(j-1)} \right] \left(\frac{d\tilde{x}_0^{(j-1)}}{d\sigma} + \frac{d\tilde{x}_1^{(j-1)}}{d\sigma} \right), \quad (26)$$

$$DC: \quad \frac{d\hat{y}_1^{(j)}}{d\gamma} = -\frac{d\hat{y}_0^{(j-1)}}{d\gamma} + u^{-1} \left(\frac{d\hat{\psi}_0^{(j-1)}}{d\gamma} + \frac{d\hat{\psi}_1^{(j-1)}}{d\gamma} \right). \quad (27)$$

Ввиду принятого для $W_1(\zeta)$ представления (13) искомая функция в левой части уравнения (26) представима рядом Фурье

$$\frac{d\tilde{\varphi}_1^{(j)}(\sigma)}{d\sigma} = \sum_{k=0}^K \left[-(2k+1)C_{2k+1}^{(j)} \right] \cos(2k+1)\sigma. \quad (28)$$

Для текущей j -й итерации все функции в правой части уравнения (26) известны. Применяя к ней БПФ по нечетным косинусам, можно найти коэффициенты Фурье-разложения левой его части (28), а значит, коэффициенты $C_{2k+1}^{(j)}$ разложения (13), функцию $W_1^{(j)}(\zeta)$ и ее производную $dW_1^{(j)}/d\zeta$ всюду в области Ω_ζ . Далее, используя связь (10) между ζ и η , можно найти производную $dW_1^{(j)}/d\eta$ всюду в области Ω_η и, в частности, ее значения на границе DC .

Аналогично, ввиду принятого для $z_1(\eta)$ представления (16) искомая функция в левой части уравнения (27) представима рядом Фурье

$$\frac{d\hat{y}_1^{(j)}(\gamma)}{d\gamma} = C_{-1}^{(j)} + \sum_{k=1}^K \left[2kC_{2k}^{(j)} \right] \cos(2k\gamma). \quad (29)$$

Для текущей j -й итерации все функции в правой части уравнения (27) известны. Применяя к ней БПФ по четным косинусам, можно найти коэффициенты Фурье-разложения левой его части (29), а значит, коэффициенты $C_{-1}^{(j)}$, $C_{2k}^{(j)}$ разложения (16), функцию $z_1^{(j)}(\eta)$ и ее производную $dz_1^{(j)}/d\eta$ всюду в области Ω_η . Далее, используя связь (10) между ζ и η , можно найти производную $dz_1^{(j)}/d\zeta$ всюду в области Ω_ζ и, в частности, ее значения на границе CA .

Единственным препятствием к применению БПФ является наличие в правых частях уравнений (26), (27) неопределенностей типа «бесконечность минус бесконечность» на концах интервалов $\sigma \in [0, \pi/2]$, $\gamma \in [0, \pi/2]$, отвечающих точке C : $\sigma = 0$, $\gamma = \pi/2$. Эти бесконечности порождаются дробно-степенными особенностями главных частей решения. В уравнениях (26), (27) они с необходимостью взаимно погашаются, но при этом дают неопределенную константу. Заметим, что логарифмические особенности, присущие этим функциям в точке A : $\sigma = \pi/2$, формально также порождают неопределенность типа «бесконечность минус бесконечность» в правой части уравнения (26). Однако при их взаимном погашении никакой неопределенности в точке A не возникает – ввиду использования здесь БПФ по нечетным косинусам, правая часть уравнения (26) при $\sigma = \pi/2$ должна обращаться в нуль. Что касается точки D : $\gamma = 0$, то она просто является точкой регулярности для всех функций, фигурирующих в правой части уравнения (27).

В соответствии с описанной в п. 2 стратегией возникающую в точке C неопределенность предлагается использовать для подавления старшей гармоники, а именно: для задачи Фурье-анализа функции $\partial\varphi_1/\partial\sigma$ потребовать выполнения условия

$$C_{2K+1}^{(j)} = 0, \quad (30)$$

а для задачи Фурье-анализа функции $\partial y_1/\partial\gamma$ – условия

$$C_{2K}^{(j)} = 0. \quad (31)$$

Каждое из этих условий линейно по отношению к искомым функциям $\partial\varphi_1/\partial\sigma$ и $\partial y_1/\partial\gamma$. Поэтому условие (30) эквивалентно заданию определенного значения производной $\partial\varphi_1/\partial\sigma$ в точке C , а условие (31), в свою очередь, эквивалентно заданию определенного значения производной $\partial y_1/\partial\gamma$ в точке C . Соответственно, обе задачи Фурье-анализа замкнуты.

Таким образом, первый шаг j -й итераций завершен. На выходе получим значения коэффициентов $\{C_k^{(j)}, k = -1, 0, 1, \dots, K\}$ для второго шага j -й итераций.

5. Построение главных частей решения и организация второго шага итераций

Для главных частей решения $z_0(\eta)$, $W_0(\zeta)$ в качестве начальных приближений для итерационного процесса выберем некоторые базовые функции $z_{00}(\eta)$, $W_{00}(\zeta)$

$$z_{00}(\eta) = z_0^{(j)}(\eta)\Big|_{j=0}, \quad W_{00}(\zeta) = W_0^{(j)}(\zeta)\Big|_{j=0}$$

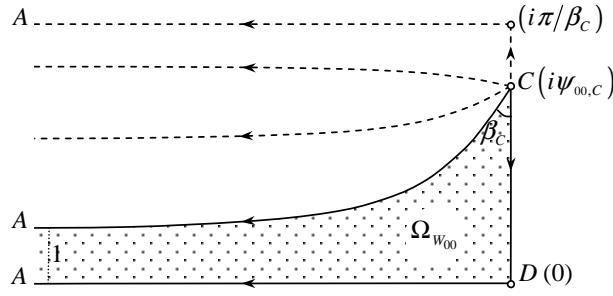
так, чтобы в плоскостях z_{00} , W_{00} им отвечали области, аналогичные Ω_z , Ω_W , отличающиеся от них только определенным фиксированным положением точки D в плоскости z_{00} и, соответственно, точки C в плоскости W_{00} . Имеющийся произвол естественно использовать с целью добиться наиболее простого замкнутого вида функций $z_{00}(\eta)$, $W_{00}(\zeta)$.

В качестве области $\Omega_{z_{00}}$ возьмем часть потенциального течения от цепочки источников, расположенных в точках

$$z_{00} = 2in; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

к стоку на бесконечности (см. затененную область на рис. 4). Мощность источников несутельственна и для определенности выбирается равной 2π .


$$t(z_{00}) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi z_{00}}{4i} \right) \Leftrightarrow z_{00}(t) = \frac{4i}{\pi} \operatorname{arctg} (e^t). \quad (32)$$
$$x_{00,D} = -\frac{4}{\pi} \text{Im} \left\{ \text{arctg} \left(i e^{i\beta_C} \right) \right\}.$$
$$t(\eta) = \frac{2\beta_C}{\pi} \ln \left(\frac{\eta - i}{\eta + i} \right) + id. \quad (33)$$
$$W_{00} = i \left(\psi_{00,C} + \frac{2\pi n}{\beta_C} \right); \quad i \left(\frac{2\pi}{\beta_C} - \psi_{00,C} + \frac{2\pi n}{\beta_C} \right); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$\theta(W_{00}) = \ln [\cos(i\beta_C W_{00}) - \cos(\beta_C \psi_{00,C})] - \ln [1 - \cos(\beta \psi_{00,C})],$$

Рис. 6. Вид вспомогательной плоскости W_{00}

а обратное отображение – функция

$$W_{00}(\theta) = \frac{i}{\beta_C} \arccos \{ e^\theta [1 - \cos(\beta_C \psi_{00,C})] + \cos(\beta_C \psi_{00,C}) \}. \quad (34)$$

В свою очередь, области Ω_θ и Ω_ζ канонического вида связаны между собой конформным отображением

$$\theta(\zeta) = \frac{2\beta_C}{\pi} \ln \left(\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} \right). \quad (35)$$

В результате комбинация отображений (34), (35) дает вид функции $W_{00}(\zeta)$. При этом в многозначных функциях \ln и \arccos необходимо выделять однозначные ветви в соответствии с видом областей $\Omega_{W_{00}}$, Ω_θ , Ω_ζ .

Отметим, что вид области $\Omega_{W_{00}}$ и, соответственно, функции $W_{00}(\zeta)$ зависит от параметра $\psi_{00,C}$. Наиболее простой вид функции получается в случае, когда $\psi_{00,C} = \pi/(2\beta_C)$. Тем не менее, целесообразно оставить возможность изменения параметра $\psi_{00,C}$. Это объясняется тем, что при фиксированном значении $\psi_{00,C}$ в области малых ε и δ , а именно при $\varepsilon < 0.3$ или $\delta < 0.3$, возникают проблемы с достижением необходимой точности численного решения граничного уравнения для функции $W(\zeta)$. Подбирая определенным образом величину параметра $\psi_{00,C}$, удастся достичь удовлетворительной точности решения для более широкой области значений ε и δ (подробный анализ приведен в разделе обсуждения результатов).

Организацию второго шага итераций естественно связать с удовлетворением тех граничных условий на полные функции $z(\eta)$, $W(\zeta)$, которые не были удовлетворены за счет первого шага. В частности, после завершения первого шага итерации будет получено определенное значение $C_{-1}^{(j)}$. В соответствии с представлением (15) функции $z_1^{(j)}(\eta)$ это означает, что на границах CA , AD будут выполняться условия

$$CA: y_1^{(j)} = 0, \quad DC: y_1^{(j)} = -\frac{\pi}{2} C_{-1}^{(j)}.$$

Чтобы функция $z(\eta)$, составленная из двух аддитивных частей $z_0(\eta)$ и $z_1(\eta)$, на этих же границах удовлетворяла условиям (14), на ее главную часть необходимо наложить условия

$$CA: y_0^{(j)} = 0, \quad DC: y_0^{(j)} = \frac{\pi}{2} C_{-1}^{(j)} - 1, \quad (36)$$

при этом базовая функция $z_{00}(\eta)$ (см. рис. 4) удовлетворяет условиям

$$CA: y_{00} = 0, \quad DC: y_{00} = -1. \quad (37)$$

В соответствии с соотношениями (36), (37) для главной части $z_0(\eta)$ функции $z(\eta)$ можно организовать второй шаг j -й итерации как конформное отображение области $\Omega_{z_{00}}$ на область $\Omega_{z_0}^{(j)}$. Последняя по виду аналогична $\Omega_{z_{00}}$ и отличается только величиной скачка в точке A при переходе с границы AD на CA . Поскольку величина этого скачка – единственный характерный размер области, организовать отображение $\Omega_{z_{00}} \rightarrow \Omega_{z_0}^{(j)}$ можно как простое умножение базовой функции $z_{00}(\eta)$ на соответствующий множитель

$$z_0^{(j)}(\eta) = \left[1 - \frac{\pi}{2} C_{-1}^{(j,0)}\right] z_{00}(\eta). \quad (38)$$

Аналогичным образом, после завершения первого шага j -й итерации будут получены определенные значения коэффициентов $C_{2k+1}^{(j)}$, $k = 0, 1, \dots, K$. В соответствии с представлением (12) функции $W_1^{(j)}(\zeta)$ это означает, что в точке C она принимает определенное значение

$$C : \quad W_1^{(j)} = i\psi_{1,C}^{(j)}, \quad \psi_{1,C}^{(j)} \equiv \sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(j)}.$$

Чтобы функция $W(\zeta)$, составленная из двух аддитивных частей $W_0(\zeta)$ и $W_1(\zeta)$, удовлетворяла условию $W_C = iu$ (см. условие (5) и рис. 2), на ее главную часть необходимо наложить условия

$$C : \quad W_0^{(j)} = i\psi_{0,C}^{(j)}, \quad \psi_{0,C}^{(j)} \equiv u - \sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(j)}, \quad (39)$$

при этом базовая функция $W_{00}(\zeta)$ (см. рис. 6) удовлетворяет условиям

$$C : \quad W_{00} = i\psi_{00,C}, \quad (40)$$

где $\psi_{00,C}$ – вспомогательный параметр, имеющий определенное значение (оно выбирается один раз, перед началом всех итераций).

В соответствии с соотношениями (39), (40) для главной части $W_0(\zeta)$ функции $W(\zeta)$ можно организовать второй шаг j -й итерации как конформное отображение области $\Omega_{W_{00}}$ на область $\Omega_{W_0}^{(j)}$. Последняя по виду аналогична $\Omega_{W_{00}}$ и отличается только величиной отрезка CD . Надо сказать, что организовать это отображение аналогично (38), как простое умножение базовой функции $W_{00}(\zeta)$ на некоторый множитель, невозможно. В отличие от области $\Omega_{z_{00}}$, у области $\Omega_{W_{00}}$ не один характерный размер, а два – это расстояние $CD = \psi_{00,C}$ и скачок на 1 в точке A при переходе с границы AD на CA , и величина скачка должна оставаться той же самой для области $\Omega_{W_0}^{(j)}$. Поэтому приходится строить более сложное конформное отображение $\Omega_{W_{00}} \rightarrow \Omega_{W_0}^{(j)}$, причем здесь возможны различные варианты. В частности, можно предложить такой вариант отображения:

$$W_0^{(j)}(\zeta) = \left[1 + \frac{\mu^{(j)}}{\lambda_{00} + W_{00}^2(\zeta)}\right] W_{00}(\zeta), \quad \lambda_{00} > \psi_{00,C}^2, \quad (41)$$

который характеризуется одним дополнительным параметром λ_{00} , определенное значение которого выбирается один раз, перед началом всех итераций, аналогично параметру $\psi_{00,C}$.

При условии $\lambda_{00} > \psi_{00,C}^2$ отображение (41) конформно всюду в области $\Omega_{W_{00}}$. Более того, сохраняются не только все углы на границах области, но и сам вид

области – меняется только величина участка границы CD . Остается только подобрать итерационный параметр $\mu^{(j)}$ так, чтобы отображение (41) давало нужное значение $\psi_{0,C}^{(j)}$ (см. условие (39))

$$\mu^{(j)} = \left(\frac{\lambda_{00} - \psi_{00,C}^2}{\psi_{00,C}} \right) \left[u - \sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(j)} - \psi_{00,C} \right]. \quad (42)$$

Выражения (38), (41), (42) представляют собой второй шаг j -й итерации. Необходимым условием сходимости итераций будет, очевидно, существование пределов

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \{C_{-1}^{(j)}\} = C_{-1}^{(\infty)}; \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(j)} \right\} = \sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(\infty)}.$$

Соответственно, за критерий выхода из итераций принималось условие

$$\max \left\{ \left| 1 - \frac{C_{-1}^{(j-1)}}{C_{-1}^{(j)}} \right|, \left| 1 - \frac{\sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(j-1)}}{\sum_{k=0}^K C_{2k+1}^{(j)}} \right| \right\} < 10^{-6}.$$

6. Анализ результатов расчетов и сравнение с имеющимися асимптотическими оценками

Для использования БПФ задавалось равномерное разбиение интервалов $\sigma \in [0, \pi/2]$ и $\gamma \in [0, \pi/2]$ с число узлов $N = 2^s + 1$, где s выбиралось от 10 до 14. По окончании итераций находилась численная невязка $r(\sigma)$ и $h(\gamma)$ уравнений (17), (21)

$$CA: \quad r(\sigma) = \left[\left(\frac{d\tilde{\varphi}}{d\sigma} \right)^* / \left(\frac{d\tilde{x}}{d\sigma} \right)^* - \varepsilon (1 - \tilde{\psi}^*) \right] - 1, \quad (43)$$

$$DC: \quad h(\gamma) = [u^{-1} \hat{\psi}^* - \hat{y}^*] - 1, \quad (44)$$

где звездочкой помечены функции, полученные в результате описанного выше итерационного процесса. Уточним, что невязки r_n вычислялись в узлах сетки σ_n , $n = 1, \dots, N$, а невязки h_n – в узлах сетки γ_n , $n = 1, \dots, N$. Как правило, все они оказывались меньше 10^{-4} .

В качестве параметра $\psi_{00,C}$ выбиралось значение, близкое к 0.5, скажем, в интервале $[0.4, 0.55]$, в качестве параметра λ_{00} – значение из интервала $[2, 5]$. Выбор различных значений $\psi_{00,C}$, λ_{00} из указанных интервалов практически не влиял на скорость сходимости итераций и величину невязок r_n , h_n .

Вместе с тем у описанного метода решения есть один неустранимый недостаток, который существенно ограничивает эффективность метода в области малых ε и δ , несмотря на сходимость итераций и малость невязок r_n , h_n . В результате конформного отображения $\Omega_\eta \rightarrow \Omega_z$ равномерное разбиение дуги единичной окружности $DC: \gamma \in [0, \pi/2]$ в плоскости η узлами γ_n приводит к неравномерному разбиению участка границы DC в физической плоскости z : в окрестности точки C сетка будет сильно разреженной. Аналогично, в результате конформного отображения $\Omega_\zeta \rightarrow \Omega_W$ равномерное разбиение дуги единичной окружности $CA: \sigma \in [0, \pi/2]$ в плоскости ζ узлами σ_n приводит к неравномерному разбиению границы CA в плоскости W : сетка будет сильно разреженной в окрестности точки C . Наличие бесконечно удаленной точки A дополнительно приводит к разрежению сетки в плоскости W по мере того, как σ приближается к $\pi/2$.

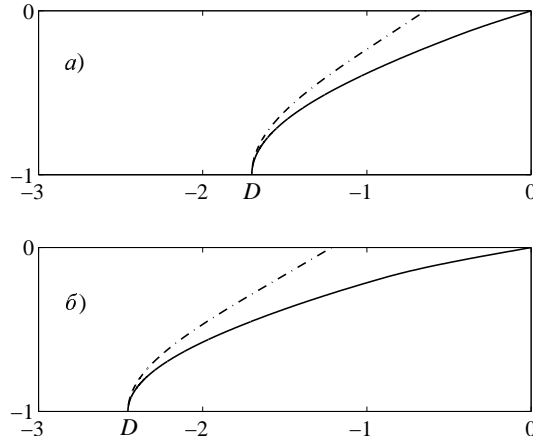


Рис. 7. Конфигурации контура DC , полученные численно (сплошные линии) и с помощью асимптотического разложения [1] (штрих-пунктирные линии), для $\varepsilon = 0.3$ и $\delta = 0.3$ (а), $\delta = 0.1$ (б)

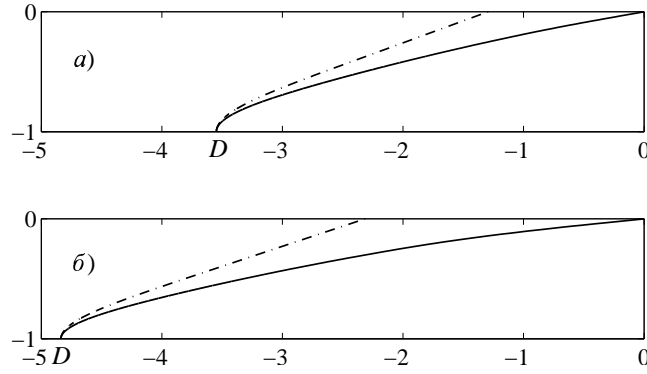


Рис. 8. Конфигурации контура DC , полученные численно (сплошные линии) и с помощью асимптотического разложения [3] (штрих-пунктирные линии), для $\varepsilon = 0.1$ и $\delta = 0.3$ (а), $\delta = 0.1$ (б)

Как следует из формулы (6), чем меньше ε и δ , тем угол β_C меньше, и эффект разрежения сетки в окрестности точки C в плоскостях z и W будет выражен сильнее. В частности, при $\varepsilon = 0.1$ и $\delta = 0.1$ и числе узлов сетки $N = 2^{10} + 1$ величина интервала сетки в окрестности точки C в плоскостях z и W достигает нескольких единиц, и увеличение числа узлов, скажем, до $N = 2^{14} + 1$ практически ничего не меняет. Соответственно, большие невязки между узлами сетки такого большого интервала приводят к значительной погрешности определения конфигурации межфазной границы DC в целом, причем невязки уравнения (21) – непосредственно, а невязки уравнения (17) – опосредованно.

Это диктует необходимость контролировать невязки (43), (44) не только в узлах сетки γ_n и σ_n , но также на последнем интервале разбиения по γ , то есть на $[\gamma_{N-1}, \gamma_N]$, и, кроме того, на первом и последнем интервалах разбиения по σ , то есть на $[\sigma_1, \sigma_2]$ и $[\sigma_{N-1}, \sigma_N]$. Обозначим эти невязки через $h_{N-1,N}(\gamma)$, $r_{1,2}(\sigma)$, $r_{N-1,N}(\sigma)$ соответственно.

В результате такого контроля было выявлено, что только в области, где $\varepsilon \geq 0.3$ и $\delta \geq 0.3$, при любых $\psi_{00,C}$, λ_{00} из указанных выше диапазонов невязки

Табл. 1

δ	ε	
	0.3	0.1
0.3	0.38, 0.35	0.36, 0.36
0.1	0.49, 0.45	0.48, 0.46

$h_{N-1,N}(\gamma)$, $r_{1,2}(\sigma)$, $r_{N-1,N}(\sigma)$ не превышают 0.03. С уменьшением как ε , так и δ (вместе или по отдельности), невязки $h_{N-1,N}(\gamma)$ растут слабо. В то же время невязки $r_{1,2}(\sigma)$, $r_{N-1,N}(\sigma)$ начинают расти быстро и достигают $10 \div 20\%$ уже при $\varepsilon = 0.1$ и/или $\delta = 0.1$. Подбор определенных значений $\psi_{00,C}$, λ_{00} из указанных выше интервалов позволяет значительно уменьшить эти невязки. В результате удастся добиться невязок $h_{N-1,N}(\gamma)$, $r_{1,2}(\sigma)$, $r_{N-1,N}(\sigma)$ не более 0.03, вплоть до $\varepsilon = 0.1$ и/или $\delta = 0.1$.

Соответственно, в диапазоне $0.1 \div 0.3$ значений ε и δ можно с удовлетворительной точностью рассчитать конфигурации межфазной границы DC и сравнить их с найденным в [3] главным членом асимптотического разложения решения. Отметим, что основной результат [3], состоит в том, что в крупномасштабном приближении контур DC можно считать прямой линией, наклоненной к горизонту под углом $\beta_C^0 = \arctg(1/\sqrt{u-1}) \sim \varepsilon^{1/2}$. При этом оставался открытым вопрос, какова точность такой асимптотической оценки? Ответ очевидным образом связан с выяснением того обстоятельства, по каким степеням ε организовано это асимптотическое разложение.

На рис. 7, 8 приведены конфигурации контура DC , полученные численно с помощью описанного выше итерационного метода решения задачи (1)–(4) (сплошные линии) и полученные с помощью асимптотического разложения [3] решения той же задачи (штрих-пунктирные линии). Рис. 7 отвечает $\varepsilon = 0.3$ и $\delta = 0.3$ (а), $\delta = 0.1$ (б). Рис. 8 отвечает $\varepsilon = 0.1$ и $\delta = 0.3$ (а), $\delta = 0.1$ (б). Конфигурации совмещались в точке D , поскольку по оценкам [3] в окрестности этой точки следует ожидать наименьших ошибок разложения.

В табл. 1 для различных ε и δ в диапазоне $0.1 \div 0.3$ приведены относительные ошибки асимптотической оценки величины $x_C - x_D$ (первое число) и величины радиуса кривизны R_D свободной границы в точке D (второе число). Как видно, эти ошибки практически совпадают и по порядку величины составляют $O(\varepsilon^{1/2})$. В результате можно сделать вывод, что асимптотическое разложение [3] организовано по степеням $\varepsilon^{1/2}$ и относительная ошибка определения конфигурации контура DC по формулам главного члена этого разложения составляет $O(\varepsilon^{1/2})$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00548).

Summary

M.M. Alimov. Iterative Solution of the Problem of Liquid Impregnation into Laminated Porous Material.

The problem of liquid impregnation into laminated porous material is considered. For case with high contrast of layers' thickness and permeability, this problem is formulated as specific free boundary problem. Numerical solution is obtained by the iterative method similarly to the Levi–Civita method in hydrodynamic of an ideal liquid. A comparison of asymptotic analysis results and numerical results is presented.

Key words: free boundary problems, multiphase mediums, liquid impregnation into porous material, VARTM technology.

Литература

1. Hsiao K.T., Mathur R., Gillespie J.W. Jr., Fink B.K., Advani S.G. A closed form solution for flow during the vacuum assisted resin transfer molding process // J. Manuf. Sci. Eng. – 2000. – V. 122, No 3. – P. 463–475.
2. Mathur R., Heider D., Hoffmann C., Gillespie J.W. Jr., Advani S.G., Fink B.K. Flow front measurements and model validation in the vacuum assisted resin transfer molding process // Polym. Compos. – 2001. – V. 22, No 4. – P. 477–490.
3. Alimov M.M., Kornev K.G. Impregnation of liquids into a laminated porous material with a high permeability contrast // Phys. Fluids.– 2007. – V. 19, No 10. – P. 102108-1–102108-11.
4. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. – Ann Arbor, Michigan: I.W. Edwards, Inc., 1946. = Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М., Л.: Гостоптехиздат, 1949. – 628 с.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
6. Saffman P.G., Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1958. – V. 245, No 1242. – P. 312–329.
7. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
9. Koppenfels W., Stalman F. Praxis der Konformen Abbildung. – Berlin: Springer, 1959. = Коппенфельс В., Штальман Ц. Практика конформного отображения. – М.: ИЛ, 1963. – 406 с.

Поступила в редакцию
26.02.08

Алимов Марс Мясумович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: Mars.Alimov@ksu.ru